

فرایندهای تصادفی، تمرین چهار،

فصل پانز سال یک هزار و چهار صد و سه

دانشکده علم رایانه و فناوری اطلاعات، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

۰- X_n زم‌زگ است. کدامیک از موارد زیر درست است و کدامیک غلط. مورد درست هر یک را بنویسید.

$$P[X_3 = 6 | X_2 = 5, X_1 = 4, X_0 = 2] = P[X_3 = 6 | X_2 = 5] \quad (\text{الف})$$

$$P[X_3 = 6 | X_2 = 5, X_1 = 4, X_0 = 2] = P[X_3 = 6] \quad (\text{ب})$$

$$P[X_3 = 5 | X_2 = 6, X_0 = 2] = P[X_3 = 6 | X_2 = 5] \quad (\text{ج})$$

$$P[X_3 = 5 | X_2 = 6, X_0 = 2] = P[X_3 = 6 | X_2 = 5] / P[X_3 = 6 | X_0 = 2] P[X_0 = 2] \quad (\text{د})$$

۱- الف) زنجیره مارکوف متناهی را در نظر بگیرید. نشان دهید هر حالت زنجیره مذکور از بین سه حالت گذار و بازگشتی پوچ و بازگشتی مثبت، کدام را می‌تواند اختیار کند.

ب) فرض کنید زنجیره مارکوفی خاصی را با گرافی دوبخشی نمایش داد. زنجیره مذکور متناوب است یا غیر متناوب؟ (یادآوری. زنجیره‌ای متناوب است اگر دوره تناوب آن بزرگتر از یک باشد و اگر دوره تناوب برابر یک باشد غیرمتناوب است) آیا به توزیع ایستا $(\pi = \pi P)$ همگرا می‌شود؟

ج) فرض کنید $G(V, E)$ با $|V|=n$ و $|E|=m$ گراف ساده (بی‌جهت، غیردوبخشی، متصل) باشد. زنجیره مارکوف متناظر این گراف را در نظر

بگیرید. اگر $i, j \in V$ و $(i, j) \in E$ آنگاه $P_{ij} = \frac{1}{d(i)}$ و در غیر این صورت برابر صفر. نشان دهید $\forall i \in V: \pi_i = \frac{d(i)}{2m}$

۲- برای هر یک از کران‌های بررسی شده در کلاس، کاربردی در رایانه و هوش مصنوعی با ذکر منبع به طور موجز و شفاف بیان کنید.

۳- مدل مارکوف مخفی را در نظر بگیرید که دارای دو حالت مخفی ۱ و ۲ با احتمالات زیر است.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همچنین احتمال مشاهدات برابر است با

$$b_1(k) = 0.02, b_1(z) = 0.98$$

$$b_2(k) = 0.10, b_2(z) = 0.90$$

احتمال مشاهده دنباله $kbbk$ و $kkbkb$ (هر دو از چپ به راست) را حساب کنید.

۴- برنامه الگوریتم پیش‌رو-پس‌رو را به گونه‌ای بنویسید که سه مقدار P و B و π را دریافت و با دریافت رشته ورودی از مشاهدات احتمال آن رشته را حساب کند. رشته‌ها را اعداد و کاما وارد می‌شوند.

۵- N توپ بین دو گلدان توزیع شده‌اند. در هر واحد زمان یکی از توپ‌ها به صورت تصادفی انتخاب از گلدان متناظرش خارج به گلدان دیگر منتقل می‌شود. تعداد توپ‌ها در یک از گلدان‌ها را در نظر بگیرید. الف- تحلیل کنید چرا مقدار احتمال وجود i توپ در گلدان i منظور برابر با $p_i = \frac{M-i}{M}, i = 0, 1, 2, \dots, M$ است. ب- مقدار حدی هر مقدار i را در گلدان مذکور بدست آورید.